अर्थशास्त्र
बी.ए. द्वितीय वर्ष (सेमिस्टर IV)

- डॉ. प्रज्ञा बागडे

अपकिरण
(Dispersion)

सांख्यिकीय माध्यांच्या अभ्यासावरुन पदमालेच्या केंद्रीय प्रवृत्तीचे मापन कसे करावे याबाबत माहिती समजते. माध्यामुळे पदमालेतील सर्व पदांना समानता प्राप्त होते. परंतु बरेचदा ही पदे एक सारखी असण्यापेक्षा बरीच भिन्न स्वरुपाची असतात. त्यामुळे माध्या पासून प्रत्येक पदाचे असणारे अंतर तसेच पदमालेचा असणारा एकूण विस्तार याबाबत माहिती मिळविणे आवश्यक असते. त्यासाठी विशिष्ट पदमालेचा स्वतंत्रपणे अभ्यास केला जातो व विविध पदमालांची तुलना केली जाते. पदमालेची 'निरपेक्ष' आणि 'सापेक्ष' गणना करण्यासाठी उपयोगात आणल्या जाणाऱ्या पद्धतींना 'अपकिरण' (Dispersion) असे म्हणतात. अपकिरणामध्ये माध्यांचा उपयोग करुन गणितीय सूत्र रचना केली जाते. म्हणून अपकिरणांच्या मापांना द्वितीय श्रेणीची माध्ये असे म्हणतात.

अपकिरणाची व्याख्या (Definition of Dispersion)-

संख्याशास्त्रात पदमालेची रचना जाणून घेण्याकरीता अपकिरणाला जास्त महत्व आहे. त्यातील काही महत्वपूर्ण व्याख्या खालीलप्रमाणे आहेत.

ए. एल. बाऊले यांच्या मते, "अपकिरण किंवा विचलन हे पदमालेतील विविध पदमुल्यांतील विचलनाचे माप आहे."

स्प्रिगेल यांच्या मते, "अपकिरणामुळे समंकांची माध्य मूल्यापासून दोन्ही बाजूकडील विस्ताराची प्रवृत्ती स्पष्ट होते."

कोनर यांच्या मते, "ज्या मर्यादेपर्यंत वैयक्तिक पदामध्ये विविधता आणि भिन्नता असते त्या मापाला अपकिरण असे म्हणतात.

बुक्स आणि डिक यांच्या मते, "अपकिरण किंवा विस्तार म्हणजे चलाचे मध्यवर्ती मूल्यापासून विचलन किंवा विखुरलेले असण्याचे प्रमाण होय."

अपकिरणाचे उद्देश (Objects of Dispersion)-

अपकिरणाचे पुढील उद्देश आहेत **-**

१. माध्यांची विश्वसनियता माहित करणे -

दिलेल्या पदमालेच्या माध्याची सत्यता पडताळून पाहण्यासाठी विचलनाचा उपयोग केला जातो. विचलन मापाने हा संकेत प्राप्त होतो की पदमालेचा माध्य हा कोणत्या मर्यादेपर्यंत पदमालेचे प्रतिनिधीत्व करीत आहे. विचलन कमी प्रमाणात असल्यास माध्याला पदमालेचा प्रतिनिधी मानता येईल आणि त्यावर विश्वास करता येईल. परंतु जर विचलन मोठ्या प्रमाणात असेल तर अशावेळी माध्य विश्वासपात्र राहणार नाही. माध्याच्या विश्वसनीयतेनी विचलन माध्याचे परिक्षण करता येते.

२. विचरणावर नियंत्रणाचे साधन उपलब्ध करणे -

विचरण मापाचा उद्देश त्यांच्या नियंत्रणाकरीता उपाय करणे हा देखील असतो. जर विचरण मोठ्या प्रमाणात असेल तर त्याचे नियंत्रण होणे आवश्यक असते. त्यादृष्टीने मार्गदर्शन प्राप्त होते.

३. दोन किंवा अधिक विषयांची तुलना करणे -

अपकिरण हे एक सापेक्ष माप असल्यामुळे संबंधित विषयावरील विविध पदमालांच्या बाबतीत अपकिरण गुणक काढून पदमालांपैकी कोणती पदमाला अधिक स्थिर आहे हे स्पष्ट करता येते.

४. सांख्यिकीय विश्लेषणासाठी उपयुक्त -

विचलन माध्याची गरज कालमाला गृहीतकृत्याची चाचणी, सहसंबंध, प्रतिपगमन, उत्पादन खर्च विश्लेषण यासारख्या महत्वपूर्ण विवेचनामध्ये असते. यावरुन विचलनाचे सांख्यिकीशास्त्रात महत्वपूर्ण स्थान आहे असे दिसून येते. सांख्यिकीशास्त्रात विचलन महत्वपूर्ण भूमिका पार पाडत असते.

५. सीमा विस्ताराचे ज्ञान -

समंक श्रेणीच्या विभिन्न पदमूल्यांचा सीमा विस्तार शोधून काढणे.

अपकिरणाचे स्वरुप (Nature of Dispersion)-

अपकिरणाचे स्वरुप पुढील दोन प्रकारचे असते -

१. निरपेक्ष अपकिरण (Absolute Dispersion)-

जेव्हा विशिष्ट पदमालेच्या आकारानुसार अपकिरण माप स्पष्ट होते तेव्हा त्याला निरपेक्ष अपकिरण असे म्हणतात. यात पदमालेचा विस्तार आणि माप याचे अध्ययन करण्यात येते. उदा. वनज, उंची, लांबी इत्यादी.

अशा अपकिरण मापाचा दोन किंवा अधिक पदमालेच्या तूलनेकरीता उपयोग होऊ शकत नाही. उदा. एक श्रेणी वजनाच्या स्वरुपात व दुसरी उंचीच्या स्वरुपात दिली असेल तर निरपेक्ष माप पद्धतीने याचा अभ्यास करता येणार नाही. अशोवळी सापेक्ष अपकिरणाचा वापर करतात.

२. सापेक्ष अपकिरण (Relative Dispersion)-

जेव्हा विशिष्ट पदमालेच्या निरपेक्ष अपकिरणात त्यांच्या माध्याने भाग देतात किंवा त्याचा अनुपात किंवा प्रतिशत दर शोधून काढतात तेव्हा अशा मापाला सापेक्ष अपकिरण असे म्हण्तात. अशा अपकिरणाला अपकिरण गुणक किंवा विचरण गुणक असेही म्हणतात.

सापेक्ष अपकिरणामुळे विविध मापात मूल्य स्पष्ट होऊनही दोन किंवा अधिक पदमालांची तुलना करता येते.

अपकिरणाचे महत्व (Importance of Dispersion)-

साख्यिकीशास्त्रात पदमालेची रचना जाणून घेण्याचे एक महत्वपूर्ण माध्यम या नात्याने अपकिरणाला महत्वाचे स्थान आहे. अपकिरणाचा उपयोग हा खालील महत्वपूर्ण कार्यासाठी करण्यात येतो त्यावरुन अपकिरणाचे महत्व स्पष्ट होते.

१. कोणत्याही क्षेत्रात अपकिरणाचे माप हे पदमालेच्या आकाराचे अध्ययन करण्यासाठी अत्यंत उपयुक्त आहे.

२. आर्थिक प्रश्नांचे विश्लेषण व तुलनात्मक अध्ययन करण्यासाठी अपकिरणाचा उपयोग करणे अत्यंत लाभदायक आहे.

३. धनाच्या वितरणातील विषमता ज्ञात करण्यासाठी अपकिरणचे माप योग्य आहे.

४. आर्थिक आणि सामाजिक प्रश्नांचे विवेचन करण्यासाठी उपकिरणाचा प्रयोग करणे उचीत ठरते.

५. आर्थिक प्रवृत्तीचे केंद्रीकरण ज्ञात करण्यासाठी अपकिरणाचा उपयोग करणे आवश्यक आहे.

६. तयार वस्तूंचे परिमाण व परिमाणाचे स्वरुप जाणण्याकरीता अपकिरणाचा गुण नियंत्रणाच्या प्रक्रियेत प्रामुख्याने प्रयोग करतात.

७. आर्थिक एकाधिकाराची समस्या समजण्यासाठी अपकिरण हे सुविधाजनक माध्यम आहे.

आदर्श अपकिरण मापाचे गुणधर्म (Properties of Good Measure of Dispersion)-

१. अपकिरण समजण्यास सोपे व सुलभ असते.

२. अपकिरणाची गणना करतांना पदमालेच्या सर्व पदांचा विचार होणे आवश्यक असते.

३. अपकिरण सहजतेने काढता यावे तसेच त्याची गणना सुलभ असावी.

४. अपकिरणाची निश्चित अशी व्याख्या करता आली पाहिजे.

५. अपकिरणावर नमुन्यातील बदलांचा परिणाम होऊ नये.

६. पदमालेतील अती टोकांच्या पदमूल्यांचा अपकिरणावर अवास्तव परिणाम होऊ नये.

अपकिरणाची गणना करण्याच्या पद्धती (Methods of Measuring Dipersion)-

१. विस्तार (Range)

२. आंतर चतुर्थक (Inter Quartile Range)

३. चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)

४. माध्य विचलन (Mean Deviation)

५. प्रमाप विचलन (Standard Deviation)

प्रमाप विचलन (Standard Deviation)-

प्रमाप विचलनाची संकल्पना सर्व प्रथम १८९३ मध्ये कार्ल पिअरसनने मांडली. विचरण मोजण्याची एक दर्जेदार व लोकप्रिय पद्धती म्हणून या पद्धतीकडे पाहिजे जाते. कारण ह्या पद्धतीत यापूर्वी अभ्यासलेल्या विचलन पद्धतीतील दोष दूर करुन विचरणाचे मापन केले जाते. या पद्धतीचे महत्वाचे वैशिष्ट्ये म्हणजे माध्य विचलनात (Mean Deviation) ज्या प्रकारे चिन्हांकडे दुर्लक्ष केले जाते तसे ह्या पद्धतीत चिन्हांकडे दुर्लक्ष केले जात नाही. ह्या शिवाय प्रमाप विचलनाचे मूल्य पदमालेतील सर्व मूल्यांवर आधारित असल्यामुळे त्याची विश्वासार्हता इतर विचलन पद्धतीपेक्षा खुप चांगली आहे. प्रमाप विचलनासाठी ग्रीक शब्द सिग्मा (6) ह्या चिन्हाचा उपयोग केला जातो.

प्रमाप विचलनाचे (Standard Deviation) उत्तर जेवढे जास्त तेवढा पदमालेच्या मूल्यांमध्ये एकजिनसीपणा जास्त असतो. प्रमाप विचलन हे विचरणाचे निरपेक्ष माप होय. प्रमाप विचरण गुणक (Co-efficient of Standard Deviation) आणि विचरण गुणक

(Co-efficient of Variation) ही त्याची सापेक्ष मापे आहेत. दोन पदमालामध्ये तौलेनिक अभ्यास करण्यासाठी प्रमाप विचरण गुणक (Co-efficient of Standard Deviation) आणि विचरण गुणक (Co-efficient of Variation) याचा उपयोग होतो. विचरण गुणक (C. V.) या दोन्ही मापांचा उपयोग करुन दोन किंवा जास्त पदमालेतील विचरणांचा तुलनाात्मक अभ्यास करता येतो.

प्रमाप विचलनाचे गुण (Merits of Standard Deviation)-

१. प्रमाप विचलनाची गणना करतांना पदमालेतील सर्वच पदांचा विचार केला जात असल्यामुळे हे माप पदमालेचे योग्य प्रकारे प्रतिनिधित्व करते.

२. या विचलनाचा इतर सांख्यिकिय सूत्रांमध्ये अवलंब केला जातो.

३. नमुन्यातील बदलांचा किंवा पदमालेतील बदलांचा या विचलनावर फारसा परिणाम होत नाही.

४. प्रमाप विचलनामध्ये चिन्हांचा विचार केला जात असल्यामुळे हे विचलन गणितीय दृष्टीने योग्य ठरते.

५. प्रमाप विचलन हे केवळ समांतर माध्यापासून काढले जाते त्यामुळे ते स्थिर असते.

६. प्रमाप विचलनावरुन 'विचरण गुणक' शोधून काढता येतो. त्यावरुन दोन किंवा अधिक पदमालेचे तुलनात्मक अध्ययन करणे शक्य होते.

७. संयुक्त विचलनाचे गणन, सामान्य वक्रांच्या नियंत्रण सीमा, प्रमाप विभ्रम इत्यादी गणना करण्यासाठी प्रमाप विचलन अत्यंत उपयुक्त ठरते.

प्रमाप विचलनाचे दोष (Demerits of Standard Deviation)-

१. प्रमाप विचलनाचे गणन बिजगणिताचा अभ्यास असलेल्या व्यक्तिंनाच करता येते.

२. प्रमाप विचलनाचे आगणन करण्यासाठी विविध गणितीय प्रक्रिया पार पाडाव्या लागत असते.

३. प्रमाप विचलनात अति टोकाच्या पदांना अधिक महत्व दिले जाते तर माध्याजवळील पदांना कमी महत्व दिले जाते. त्यामुळे वर्ग काढतांना त्यावर विपरीत परिणाम होतो.

प्रमाप विचलनाचे गणन (Calculation of Standard Deviation)-

प्रमाप विचलनासाठी (Standard Deviation) आपण 6 (Sigma) किंवा S.D. ह्या सांकेतिक चिन्हांचा उपयोग केला जातो.

अ. वैयक्तिक पदमाला (Individual Series)-

वैयक्तिक पदमालेत S.D. शोधून काढण्याकरीता खालील दोन पद्धतींचा अवलंब केला जातो.

I- प्रत्यक्ष पद्धती (Direct Method)-

प्रत्यक्ष पद्धतीत S.D. काढण्याकरिता खालील पद्धतींचा अवलंब करावा.

१. दिलेल्या पदमालेचे Mean काढा.

२. आलेल्या Mean चे प्रत्येक पदापासूनचे अंतर शोधा तिला dx (From Mean) असे म्हणा. dx ह्या रकानाची बेरीज करा. तिला Σdx असे म्हणा.

३. पुढील रकान्यात आलेल्या प्रत्येक dx चा वर्ग (Square) लिहा. त्या रकान्याला dx^2 असे नाव द्या.

४. dx^2 ह्या रकान्याची बीजगणितीय पद्धतीने बेरीज करा. बेरजेला Σdx^2 असे नाव द्या.

५. S.D. काढण्याकरीता खालील सूत्राचा अवलंब करा.

$$\text{S.D. or } 6 = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n}}$$

६. आलेल्या संख्येचा वर्गमूळ म्हणजे S.D. काढा.

II- लघुत्तरी पद्धती (Short-Cut Method)-

लघुत्तरी पद्धती ने S.D. काढण्यासाठी खालील पद्धतीचा अवलंब करावा.

१. दिलेल्या पदमाला लिहून घ्या.

२. Assumed Mean घेऊन dx शोधून काढा.

३. dx च्या रकान्यांची बेरीज करा. बेरजेला Σdx असे म्हणा.

४. खालील सूत्रांचा अवलंब करा

$$S.D. \text{ or } 6 = \sqrt{\frac{\Sigma fdx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fdx}{n}\right)^2}$$

.

प्रमाप विचलन (S.D.) हे अपकिरणांचे निरपेक्ष माप आहे. तुलना करण्यासाठी तसेच विचलनांचे सापेक्ष मापन करण्यासाठी प्रमाप विचलन गुणक (Co-efficient of S.D.) आणि विचरण गुणक

(Co-efficient of Variation) शोधून काढतात.

१. प्रमाप विचलन गुणक (Co-efficient of S.D.)-

प्रमाप विचलन गुणक शोधून काढण्याकरीता खालील सूत्राचा अवलंब करतात.

$$\text{Co-efficient of S.D.} = \frac{S.D.}{a}$$

S.D. - Stands for Standard Deriation
a - Stands for Mean

२. विचरक गुणक (Co-efficient of Variation C.V.)-

$$C.V. = \frac{S.D.}{a} \times 100$$

OR

C.V.= Co-efficient of S.D. x 100

विचलन गुणक (C.V.) हा नेहमी प्रतिशत प्रमाणात (%) दर्शविल्या जातो.

उदा. १. खालील पदांचे प्रमाप विचलन काढा.

(Find out the Standerd Deviation of the following data)

अनुक्रमांक (Sr.No.)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
मजुरी (Wages)	15	16	18	20	22	23	25	26	27	28

१. प्रत्यक्ष पद्धती (Direct Methods)-

अनुक्रमांक (Sr. No.)	मजुरी (Wages) (m)	समांतर माध्यापासून विचलन Deriation from Mean (dx)	विचलनाचा वर्ग Square of Deviation dx^2
1	15	-7	49
2	16	-6	36
3	18	-4	16
4	20	-2	4
5	22	0	0
6	23	+1	1
7	25	+3	9
8	26	+4	16
9	27	+5	25
10	28	+6	36
n=10	पदमूल्याची बेरीज $\Sigma m=220$		विचलनाच्या वर्गाची बेरीज $\Sigma dx^2=192$

$$a = \frac{\Sigma m}{n} = \frac{220}{10} = 22$$

$$\text{Standard Deviation or } 6 = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{192}{10}}$$

$$= \sqrt{19.2}$$

$$= 4.382$$

6- प्रमाप विचलन = 4.382
(Standard Deviation) (Sigma)

dx- समांतर माध्यापासून विचलन
(Deviation from Mean)

Dx^2- विचलनाचा वर्ग
(Square of Deviation)

n- पदांची संख्या
(Number of item)

२. लघु पद्धती (Short-Cut Method)-

अनुक्रमांक (Sr.No.)	मजुरी (Wages) (m)	कल्पित माध्यापासून विचलन (Deriation from Assumed Areages) (dx) x= 20	विचलनाचा वर्ग (Square of Deviation) dx^2
1	15	-5	25
2	16	-4	16
3	18	-2	4
4	20	0	0
5	22	+2	4
6	23	+3	9
7	25	+5	25
8	26	+6	36
9	27	+7	49
10	28	+8	64

n=10		$\Sigma dx=20$	$\Sigma dx^2=232$

$$S.D. = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma dx}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{232}{10} - \left(\frac{232}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{23.2 - (2)^2}$$

$$= \sqrt{23.2 - (4)}$$

$$= \sqrt{19.2}$$

$$= 4.382$$

n = पदांची संख्या (Numebr of item)

dx - कल्पित माध्यापासून विचलन (Deviation from assumed mean)

dx^2 - विचलनाचा वर्ग (Square of Deviation)

x - कल्पित माध्य

उदा. २. खालील समंकांवरुन प्रमाप विचलनाचे आगणन करा.

(Calculate the Standard Deviation from the following data)

निर्देशांक (Index No.) - 129 140 130 130 127 137 142 129 130 131 120 127

अनुक्रमांक (Sr.No.)	निर्देशांक (Index No.) (m)	कल्पित माध्यापासून विचलन (Deriation from Assumed Mean) (dx) X= (130)	विचलनाचा वर्ग (Square of Deviation) dx^2
1	129	-1	1
2	140	+10	100
3	130	0	0
4	130	0	0
5	127	-3	9
6	137	+7	49
7	142	+12	144
8	129	+1	1
9	130	0	0
10	131	+1	1
11	120	-10	100
12	127	-3	9
n=12	$\Sigma m=1572$	$\Sigma dx=12$	$\Sigma dx^2=414$

By Short out Method-

$$S.D. \text{ OR } 6 = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma dx}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{414}{12} - \left(\frac{12}{12}\right)^2}$$

$$= \sqrt{34.5 - (1)^2}$$

$$= \sqrt{34.5-1}$$

$$= \sqrt{33.5}$$

$$= 5.79$$

उदा. ३.प्रमाप विचलनाचे आगणन करा.

(Calculate the Standard Deviation)

अनुक्रमांक (Sr. No.)-	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
आकार (Size)-	92	105	120	150	200	98	90	45	60	40

प्रत्यक्ष पद्धती (Direct Method)-

अनुक्रमांक **(Sr.No.)**	पदांचा आकार **(Size of item) (m)**	समांतर माध्यापासून विचलन **(Deviation from Mean) (dx) x=100**	विचलनाचा वर्ग **(Square of Deviation) dx^2**
1	92	-8	64
2	105	+5	25
3	120	+20	400
4	150	+50	2500
5	200	+100	10,000
6	98	-2	4

7	90	-10	100
8	45	-55	3025
9	60	-40	1600
10	40	-60	3600
n=10	Σm=1000	Σdx=0	Σdx^2=21318

माध्य (Mean)-

$$a = \frac{\Sigma m}{n}$$

$$= \frac{1000}{100}$$

$$= 100$$

प्रमाप विचलन (Standard Deviation)-

$$\text{S.D. OR } 6 = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{21318}{10}}$$

$$= \sqrt{2131.8}$$

$$\therefore 6 = 46.17$$

लघु पद्धती (Short-Cut Method)-

अनुक्रमांक (Sr.No.)	पदांचा आकार (Size of item) (m)	कल्पित माध्यापासून विचलन (Deriation from Assumed Mean) (dx) 98	विचलनाचा वर्ग (Square of Deviation) dx^2
1	92	-6	36
2	105	7	49
3	120	22	484
4	150	52	2704
5	200	102	10404
6	98	0	0
7	90	-8	64
8	45	-53	2809
9	60	-38	1444
10	40	-58	3364

n=10	n=1000	Σdx=20	Σdx^2=21358

प्रमाप विचलन (Standard Deviation)-

$$\text{S.D. OR } 6 = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma dx}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{21358}{10} - \left(\frac{20}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2135.8 - (2)^2}$$

$$= \sqrt{2135.8-4}$$

$$= \sqrt{2131.8}$$

$\therefore$ S.D. = 46.17

उदा. ४ - प्रमाप विचलनाचे प्रत्यक्ष व लघु पद्धतीद्वारे आगणन करा.

(Calculate Standard Deviation by direct and Short cut Method)

m- 83 85 87 84 80 90 86 82 78 45

प्रत्यक्ष पद्धती (Direct Method)-

आकार **(Size)** **(m)**	समांतर माध्यापासून विचलन **(Deviation from Mean)** **(dx) x=80**	विचलनाचा वर्ग **(Square of Deviation)** **(dx^2)**
83	3	9
85	5	25
87	7	49
84	4	16
80	0	0
90	10	100
86	6	36
82	2	4
78	-2	4
45	-35	1225
$\Sigma m=800$ n=10	$\Sigma dx=0$	$\Sigma dx^2=1468$

माध्य (Mean)-

$$a = \frac{\Sigma m}{n} = \frac{800}{10} = 80$$

प्रमाप विचलन (S.D.)-

$$S.D.\ OR\ 6 = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{1468}{10}}$$

$$= \sqrt{146.8}$$

$$\therefore S.D. = 12.11$$

लघु पद्धती (Short-Cut Method)-

आकार **(Size) (m)**	कल्पित माध्यापासून विचलन **(Deriation from Assumed Mean) (dx) 83**	विचलनाचा वर्ग **(Square of Deviation) (dx^{2})**
83	0	0
85	+2	4
87	+4	16
84	+1	1
80	-3	9
90	+7	49
86	+3	9
82	-1	1
78	-5	25
45	-38	1444
n=10	$\Sigma dx=30$	$\Sigma dx^2=1558$

प्रमाप विचलन (S.D.)-

$$S.D.\ OR\ 6 = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma dx}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1558}{10} - \left(\frac{-30}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{155.8 - (-3)^2}$$

$$= \sqrt{155.8 - 9}$$

$$= \sqrt{146.8}$$

$\therefore$ S.D. = 12.11

उदा. ५ - खालील पदमालेचे प्रमाप विचलन गुणक व विचरण गुणक काढा.

(Find out the Co-efficient of Standard Deviation and Co-efficient of Variation for the Following Series)

विद्यार्थ्यांचे नाव - A B C D E F G H I J K L
(Name of Student)
गुण (Marks)- 82 88 90 80 82 72 78 80 70 72 90 32
टीप - प्रमाप विचलन गुणक व विचरण गुणक काढण्यासाठी आधी माध्य आणि प्रमाप विचलन काढावे लागते.

विद्यार्थ्यांचें नाव (Name of Student)	**गुण (Marks) (m)**	**कल्पित माध्यापासून विचलन Deriation from Assumed Mean (dx) 80**	**विचलनाचा वर्ग Square of Deviation (dx^2)**
A	82	+2	4
B	88	+8	64

C	90	+10	100
D	80	0	0
E	82	+2	4
F	72	-8	64
G	78	-2	4
H	80	0	0
I	70	-10	100
J	72	-8	64
K	90	+10	100
L	32	-48	2304
n=12		$\Sigma dx = -44$	$\Sigma dx^2 = 2808$

माध्य (Mean)-

$$a = x + \frac{\Sigma dx}{n}$$

$$= 80 + \frac{-44}{12}$$

$$= 80 - 3.67$$

$$\therefore a = 76.33$$

प्रमाप विचलन (Standard Deviation)-

$$S.D. \text{ OR } 6 = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma dx}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2808}{12} - \left(\frac{-44}{12}\right)^2}$$

$$= \sqrt{234 - (-3.67)^2}$$

$$= \sqrt{234 - 13.46}$$

$$= \sqrt{220.54}$$

$$\therefore S.D. \text{ OR } 6 = 14.85$$

प्रमाप विचलन गुणक (Co-efficient of S.D.)- $= \frac{S.D.}{a}$

$= \frac{14.84}{76.33}$

$= 0.19$

विचरण गुणक
(Co-efficient of Variation)-

$$C.V. = \frac{S.D.}{a} \times 100$$

$$= \frac{14.84}{76.33} \times 100$$

$$\therefore C.V. = 19.45$$

उदा. ६ - दोन्ही पदमालांचे प्रमाप विचलन काढून विचरण गुणकाच्या सहाय्याने तुलना करा.

गव्हाची किंमत (रु.) Price of Wheat (Rs.)-	10	12	14	10	15	16	12	10	12	10
ज्वारीची किंमत (रु.) Price of Jawar (Rs.)-	6	9	12	13	16	18	20	17	10	7

गहु (Wheat)				**ज्वारी (Jawar)**		
किंमत (Price) (m)	x=12 dx	dx^2		किंमत (Price)	x=12 dx	dx^2
10	-2	4		6	-6	36
12	0	0		9	-3	9

14	+2	4		12	0	0
10	-2	4		13	1	1
15	+3	9		16	4	16
16	+4	16		18	6	36
12	0	0		20	8	64
10	-2	4		17	5	25
12	0	0		10	2	4
10	-2	4		7	5	25
n = 10	$\Sigma dx = 1$	$\Sigma dx^2 = 45$		n =10	$\Sigma dx = 8$	$\Sigma dx^2 = 216$

गहु (Wheat)

माध्य (Mean)-

$$a = x + \frac{\Sigma dx}{n}$$

$$= 12 + \frac{1}{10}$$

$$= 12 + .1$$

$$\therefore a = 12.1$$

ज्वारी (Jawar)

माध्य (Mean)-

$$a = x + \frac{\Sigma dx}{n}$$

$$= 12 + \frac{8}{10}$$

$$= 12 + .8$$

$$\therefore a = 12.8$$

प्रमाप विचलनाचे आगणन

$$S.D. = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma dx}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{45}{10} - \left(\frac{1}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{4.5 - (0.1)^2}$$

$$= \sqrt{4.5 - 0.1}$$

$$= \sqrt{4.49}$$

∴ S.D. OR 6 = 2.12

विचरण गुणक

$$C.V. = \frac{S.D.}{a} \times 100$$

$$= \frac{2.12}{12.1} \times 100$$

∴ C.V. = 17.52

प्रमाप विचलनाचे आगणन

$$S.D. = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma dx}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{216}{10} - \left(\frac{8}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{21.6 - (.8)^2}$$

$$= \sqrt{21.6 - 0.64}$$

$$= \sqrt{20.96}$$

∴ S.D. OR 6 = 4.57

विचरण गुणक

$$C.V. = \frac{S.D.}{a}$$

$$= \frac{4.57}{12.8} \times 100$$

∴ C.V. = 35.70

गव्हाचा विचरण गुणक तुलनात्मकदृष्ट्या कमी आहे म्हणून ज्वारीच्या किमतीपेक्षा गव्हाच्या किंमती अधिक स्थीर आहे.

खंडित पदमाला (Discrete Series)-

खंडित पदमालेत S.D. शोधून काढण्याकरीता खालील दोन पद्धतींचा अवलंब केला जातो.

I- प्रत्यक्ष पद्धती (Direct Method)-

१. दिलेल्या पदमालेचे समांतर माध्य (mean) काढा. त्यासाठी $a = \frac{\Sigma mf}{n}$ ह्या सूत्राचा वापर करा.

२. आलेले mean 'x' घेऊन 'dx' शोधून काढा.

३. पुढील रकान्यात 'f' आणि 'dx' चा गुणाकार करा. त्याला 'fdx' असे म्हणा.

४. 'fdx' ची बेरीज करा तिला Σfdx असे म्हणा.

५. पुढील रकान्यात fdx x dx करुन fdx^2 काढा.

६. fdx^2 ची बेरीज करुन तिला Σfdx^2 काढा.

७. S.D. काढण्यासाठी खालील सूत्राचा अवलंब करा.

$$S.D. = \sqrt{\frac{\Sigma fdx^2}{n}}$$

II- लघुत्तरी पद्धती (Short - Cut Method)-

१. कल्पित माध्य (Assumed mean) घेऊन dx शोधून काढा.

२. Σfdx शोधून काढा.

३. fdx^2 शोधून काढा.

४. S.D. काढण्यासाठी खालील सूत्राचा अवलंब करा.

$$S.D. \text{ or } 6 = \sqrt{\frac{\Sigma fdx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fdx}{n}\right)^2}$$

टिप - खंडित पदमालेत प्रत्यक्ष पद्धतीने S.D. काढण्यापेक्षा लघुत्तरी पद्धतीने S.D. काढणे सोपे जाते.

उदा. ७ – खालील खंडित पदमालेवरुन प्रत्यक्ष व लघु पद्धतीने प्रमाप विचलन काढा.

पदांचा आकार (Size)-	5	15	25	35	45	55
वारंवारता (Frequency)-	3	7	9	11	13	7

प्रत्यक्ष पद्धती **(Direct Method)-**

पदांचा आकार (Size) (m)	वारंवारता (Frequency) (f)	mf	समांतर माध्यापासून विचलन (Deviation from mean (m-x) (dx) x = 34	F x dx (fdx)	Fdx x dx (fdx^2)
5	3	15	-29	-87	2523
15	7	105	-19	-133	2527
25	9	225	-9	-81	729
35	11	385	+1	+11	11
45	13	585	+11	+143	1573
55	7	385	+21	+147	3087
	n= 50	Σmf = 1700		Σfdx =0	Σfdx^2= 10450

$$a = \frac{\Sigma mf}{n}$$

$$= \frac{1700}{50}$$

$$\therefore a = 34$$

$$\text{S.D. or } 6 = \sqrt{\frac{\Sigma fdx^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{10450}{50}}$$

$$= \sqrt{209}$$

$$= 14.46$$

लघुपद्धती (Short- Cut Method)-

पदांचा आकार (Size) (m)	कल्पित माध्यापासून विचलन (Deviation from Assumed mean) (dx)	वरंवारता (Frequency) (f)	Fxdx (fdx)	Fdx x dx (fdx^2)
5	-30	3	-90	2700
15	-20	7	-140	2800
25	-10	9	-90	900
35	0	11	0	0
45	+10	13	+130	1300
55	+20	7	+140	2800
		n= 50	Σfdx = -50	Σfdx^2= 10500

$$S.D. = \sqrt{\frac{\Sigma fdx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fdx}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{10500}{50} - \left(\frac{-50}{50}\right)^2}$$

$$= \sqrt{210 - (-1)^2}$$

$$= \sqrt{210 - 1}$$

$$= \sqrt{209}$$

$$\therefore S.D. = 14.46$$

उदा. ८ - खालील पदमालेचे प्रमाप विचलन व विचरण गुणकाचे आगणन करा.

(Calculate S.D. and Co-efficient of Variation for the following series)

वय - (Age)-	10	20	30	40	50	60	70	80
व्यक्तिंची संख्या - (No. of Persons)-	3	5	10	11	14	16	15	15

वय (Age) (m)	कल्पित माध्यापासून विचलन (Deviation from Assumed mean) (dx) x = 40	i = 10	व्यक्तिंची संख्या (No. of Persons) (f)	F x dx (fdx)	Fdx x dx (fdx^2)
10	-30	-3	3	-9	27
20	-20	-2	5	-10	20
30	-10	-1	10	-10	10
40	0	0	11	0	0
50	+10	+1	14	14	14
60	+20	+2	16	32	64
70	+30	+3	15	45	135
80	+40	+4	15	60	240
			n= 89	$\Sigma fdx = 122$	$\Sigma fdx^2 = 510$

प्रमाप विचलन (S.D.)-

$$\text{S.D. or } 6 = \sqrt{\frac{\Sigma fdx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fdx}{n}\right)^2} \text{ X i}$$

$$= \sqrt{\frac{510}{89} - \left(\frac{122}{89}\right)^2} \text{ X } 10$$

$$= \sqrt{5.73 - (1.37)^2} \text{ X } 10$$

$$= \sqrt{5.73 - 1.88} \text{ X } 10$$

$$= \sqrt{3.85} \text{ X } 10$$

$$= 1.96 \text{ X } 10$$

$$\therefore 6 = 19.6$$

माध्य (Mean)-

$$a = X + \frac{\Sigma fdx}{n} \text{ X i}$$

$$= 40 + \frac{122}{89} \text{ X } 10$$

$$= 40 + 1.37 \text{ X } 10$$

$$= 40 + 13.70$$

$$\therefore a = 53.70$$

विचरण गुणक (C.V.)-

$$C.V. = \frac{S.D.}{a} \times 100$$

$$= \frac{19.6}{53.70} \times 100$$

$$\therefore C.V. = 36.49$$

उदा. ९ - खालील माहितीच्या आधारे प्रमाप विचलन आणि विचरण गुणक काढा.

(Calculate Standard Deviation and Co-efficient of Variation from the following data)

X	20	40	60	80	100	120	140	160
वारंवारता	13	27	35	38	32	25	28	9

पदमूल्य X (m)	**कल्पित माध्यापासून विचलन (Deviation from Assumed mean) (dx) x = 80**	**i = 20**	**वारंवारता Frequency (f)**	**F x dx (fdx)**	**Fdx x dx (fdx^2)**
20	-60	-3	13	-39	117
40	-40	-2	27	-54	108
60	-20	-1	35	-35	35
80	0	0	38	0	0
100	+20	+1	32	+32	32
120	+40	+2	25	+50	100
140	+60	+3	28	+84	252
160	+80	+4	9	+36	144
			n= 207	Σfdx = 74	Σfdx^2= 788

माध्य (Mean)-

$$a = X + \frac{\Sigma fdx}{n} \times i$$

$$= 80 + \frac{74}{207} \times 20$$

$$= 80 + .357 \times 20$$

$$= 80 + 7.15$$

$$\therefore a = 87.15$$

प्रमाप विचलन (S.D.)-

$$S.D. = \sqrt{\frac{\Sigma fdx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fdx}{n}\right)^2} \times i$$

$$= \sqrt{\frac{788}{207} - \left(\frac{74}{207}\right)^2} \times 20$$

$$= \sqrt{3.81 - (0.36)^2} \times 20$$

$$= \sqrt{3.81 - 0.13} \times 20$$

$$= \sqrt{3.68} \times 20$$

$$= 1.92 \times 20$$

$$\therefore S.D. = 38.4$$

विचरण गुणक (C.V.)-

$$C.V. = \frac{S.D.}{a} \times 100$$

$$= \frac{38.4}{87.15} \times 100$$

$$\therefore C.V. = 44.06$$

उदा. १० - खालील शेअर्सच्या किंमतीवरुन विचरण गुणक (C.V.) काढा.

(From the Prices of Share find out Co-efficient of Variation)

	माध्य (Mean)	प्रमाप विचलन (Standard Deriation)
Share A	321.63	7.43
Share B	2540.12	13.89

विचरण गुणक (C.V.)-

Share A

$$C.V. = \frac{S.D.}{a} \times 100$$

$$= \frac{7.43}{321.63} \times 100$$

$$= 0.023 \times 100$$

$$\therefore C.V. = 2.31$$

Share B

$$C.V. = \frac{S.D.}{a} \times 100$$

$$= \frac{13.89}{2540.12} \times 100$$

$$= .005$$

$$\therefore C.V. = .55$$

अपेक्षित प्रश्न

दिर्घोत्तरी प्रश्न

१. अपकिरण म्हणजे काय? त्याचे उद्देश व स्वरुप स्ष्ट करा.

२. प्रमाप विचलन म्हणजे काय? त्याचे गुण व दोष स्पष्ट करा.

लघुत्तरी प्रश्न

१. अपकिरण म्हणजे काय?

२. अपकिरणाचे उद्देश कोणते?

३. अपकिरणाचे स्वरुप स्ष्ट करा.

४. चांगल्या अपकिरणाचे गुणधर्म सांगा.

५. प्रमाप विचलन म्हणजे काय?

६. प्रमाप विचलनाचे गुण सांगा.

७. प्रमाप विचलनाचे दोष सांगा.