अर्थशास्त्र

बी.ए. प्रथम वर्ष (सेमिस्टर II)

- डॉ. प्रज्ञा बागडे

सांख्यिकीय माध्ये

(Statistical Averages)

सांख्यिकी शास्त्रात माध्याला अत्यंत महत्वाचे स्थान आहे. एखाद्या विषयाबाबत किंवा क्षेत्राबाबत संशोधनाद्वारे सामान्य व तुलनात्मक निष्कर्ष काढणे हा संख्याशास्त्राचा प्रमुख उद्देश आहे. त्यासाठी सांख्यिकीय माध्यांचा मोठ्या प्रमाणात उपयोग केला जातो. आपण सरासरी ह्या शब्दाचा वापर नेहमी करतो. सरासरी म्हणजेच 'माध्य' होय. सरासरी म्हणजे संपूर्ण समूहाची प्रतिनिधिक स्वरुपाची सामान्य प्रवृत्ती होय. माध्यानाच 'केंद्रीय प्रवृत्ती' असेही म्हणतात. अनेक माध्ये ही केंद्रीय प्रवृत्तीचे द्योतक आहेत. ते केंद्रीय प्रवृत्तीशी निगडीत आहेत. ही माध्ये सारणीयन ही प्रक्रीया पूर्ण झाल्यानंतर उपलब्ध अंकांचे प्रतिनिधित्व करणारा अंक शोधून काढतात. म्हणून त्यांना केंद्रीय प्रवृत्तीची परिमाणे किंवा केंद्रिय प्रवृत्तीची माध्ये असे म्हणतात. **ऑर्थर बाऊले** सांख्यिकीची व्याख्या करतांना म्हणतात, "सांख्यिकी हे माध्याचे शास्त्र आहे". माध्य म्हणजे, "पूर्ण समंक क्षेत्रात येणारे व त्या क्षेत्रातील सर्व पदांचे प्रतिनिधीत्व करणारे केंद्रीय प्रवृत्तीदर्शक पद म्हणजे माध्य होय."

माध्याचे उद्देश व कार्ये

(Objectives and Funtions of Averages)

१. समंकांना संक्षिप्त व वस्तुनिष्ठ बनविणे

हा माध्यांचा मूलभूत असा उद्देश आहे. अनुसंधानाने प्राप्त केलेले समंक त्याच स्थितीत सादर केले तर ते लक्षातही राहत नाही किंवा त्या माहितीचा अर्थ काढता न आल्यामुळे त्या माहितीला फारसा अर्थही नसतो. याउलट समंकांचे संकलन केल्याने त्याचे वर्गीकरण, सारणीयन व मालीकात रचना करुन त्या सर्व समंकांचे प्रतिनिधित्व करु शकेल असा अंक माध्याच्या माध्यमातून उपलब्ध करुन घेतल्यास सांख्यिकीय समंकांचा आकार संक्षिप्त तर होतोच पण त्याचबरोबर आकडेवारीचे स्वरुप देखील वस्तुनिष्ठ बनते.

२. तुलनात्मक अध्ययन करणे

माध्याद्वारे समंकांना प्रातिनिधिक स्वरुप प्राप्त होते. त्यामुळे विविध अंक समुहाचे माध्यम काढून त्यांचे तुलनात्मक अध्ययन करणे सोपे जाते. त्यावरुन योग्य तो निर्णय घेता येतो. उदा. दोन देशातील आयात-निर्यातीची तुलना इत्यादी.

३. विविध सांख्यिकीय विश्लेषणात सहाय्य करणे

विविध विश्लेषणात्मक निर्णय घेतांना सांख्यिकीय माध्यांचा उपयोग करता येतो. अंक, विचरणे, विषमता, सहसंबंध इत्यादी बाबींची माहिती मिळविण्यासाठी माध्यांचा मोठ्या प्रमाणात उपयोग करता येतो. त्यामुळे धोरण ठरविणे, भविष्याबाबत अनुमान करणे, निर्वचन करणे यासाठी माध्यांचा उपयोग केला जातो.

४. गणितीय पध्दतीचा आधार

सांख्यिकीय सामग्री गोळा झाल्यानंतर त्याचे विविध प्रकारात वर्गीकरण केले जाते. त्याच्यावर आधारित निष्कर्ष काढण्यासाठी गणितीय पध्दतींचाच वापर करवा लागतो. दोन

किंवा अधिक पदांची तुलना करण्यासाठी माध्यांचा वापर ही एक आवश्यक बाब आहे. गणितीय संबंध स्पष्ट करण्यासाठी माध्ये हे आवश्यक आहेत.

५. प्रगतिशील विवेचन

सांख्यिकीय माध्ये ही अशा स्वरुपाची असतात की ज्यांचा वापर विविध गणितीय प्रक्रियांमध्ये उपयुक्त ठरतो. एका माध्याच्या आधारे दुसरे सांख्यिकीय विश्लेषण करणे सुलभ जाते. समांतर माध्याचा वापर प्रमाप विचलनामध्ये तसेच सहसंबंध गुणकात केल्यास येणारे निष्कर्ष हे अधिक खात्रीशीर असतात.

६. समुहाचे प्रतिनिधीत्व

माध्य हे संपूर्ण समुहाचे चित्र दर्शवितात. माध्यामुळे समुहाबद्दलचे योग्य निष्कर्ष काढता येतात. ते चांगले आहे की नाही, योग्य आहे की अयोग्य इत्यादी. माध्यात सरासरी अंक निश्चित करुन संपूर्ण समुहाची माहिती प्राप्त होते. हे माध्य त्या समुहाच्या रचनेबद्दल योग्य माहिती देतात.

७. सामान्य लोकांना आकलन

प्रत्येकालाच गणित हा विषय समजतोच असे नाही. त्यामुळे सामान्य लोकांना वस्तुनिष्ठता आवश्यक असते. त्यामुळे शाब्दिक विश्लेषणापेक्षा गणितीय विश्लेषण अधिक महत्वपूर्ण मानले जाते. त्यामुळेच विविध प्रकारची माध्ये विकसित करण्यात आली असून कमीत कमी आकडेमोड करुन व गणितीय गुंतागुंत कमी करुन ही माध्ये वापरता येतात व सर्वसामान्यांना त्याचे आकलन होते.

माध्याचे आवश्यक गुण / घटक

(Essential Factors of an Averages)

माध्यांचे उद्देश आणि कार्ये योग्य प्रकारे पूर्ण होण्यासाठी माध्यांमध्ये पुढील गुणधर्म असणे आवश्यक आहे. यांनाच माध्यांचे आवश्यक घटक असेही म्हणतात.

१. समजण्यास सोपे असावे

माध्य हे समजण्यास सोपे असावे. अनेक आणि क्लिष्ट अंकांना साधे स्वरुप देणे हे माध्याचे प्रमुख कार्य आहे. त्यामुळे सुलभता हा माध्याचा एक प्रमुख आवश्यक गुण समजला जातो.

२. माध्याची व्याख्या स्पष्ट व निश्चित असावी

माध्याची एक निश्चित व्याख्या केलेली असावी. तसेच ती सर्वांना समजेल एवढी स्पष्ट सुध्दा असावी. अन्यथा माध्याचे गणन करतांना निघालेल्या निष्कर्षांमुळे गोंधळाची स्थिती निर्माण होऊ शकते.

३. गणन सोपे असावे

माध्यांचे गणन करण्यासाठी उपयोगात आणली जाणारी पध्दती किंवा सुत्रे अत्यंत सोपी असावीत. म्हणजेच ही पध्दती कठीण किंवा किचकट नसावी. अन्यथा ह्या माध्यांच्या व्यापक प्रमाणात तसेच सर्वसामान्यपणे उपयोग करता येणार नाही.

४. बीजगणितीय गणनास उपयुक्त

माध्य हे अंकगणित किंवा बीजगणित यांचा आधार घेवून काढलेले असावयास पाहिजे. माध्याच्या आधारे बीजगणितीय अध्ययन सोपे झाले पाहिजे.

५. प्रतिनिधित्व करणारे असावे

माध्य काढतांना विशिष्ट क्षेत्रातील सर्व पदांचा विचार केलेला असावा म्हणजे ते माध्य संबंधित असणाऱ्या संपूर्ण क्षेत्राचे प्रतिनिधित्व करु शकते. माध्य निश्चित करतांना काही पदे वगळण्यात आल्यास येणारे माध्य पदमालेचे योग्य प्रकारे प्रतिनिधीत्व करु शकणार नाही.

६. मूल्यांमध्ये स्थिरता असावी

एखाद्या विशिष्ट अंकसमुहासाठी माध्य निश्चित झाल्यानंतर त्या समुहातील काही पदे वाढविलीत किंवा उभी केलीत तरी देखील माध्य हे स्थिर असले पाहिजे.

माध्यांचे प्रकार

(Types of Averages)

माध्यांचे पुढील पाच प्रकार आहेत -

१. समांतर माध्य (Arithmetic Average or Mean)

२. मध्यका (Median)

३. भूयिष्टक (Mode)

४. गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)

५. हरात्मक माध्य (Harmonic Mean)

१. समांतर माध्य (Arthmetic Average or Mean)

समांतर माध्य हे माध्याचे अत्यंत सोपे आणि लोकप्रिय असे स्वरुप आहे. सामान्यपणे सरासरी म्हणजे समांतर माध्य असाच माध्याचा अर्थ काढण्यात येतो. यालाच गणितीय माध्य असेही म्हणतात.

व्याख्या

(Definition)

"एखाद्या पदमालेतील सर्व पदमूल्यांना एकूण पदसंख्येने भाग देवून जो अंक प्राप्त होतो त्याला समांतर माध्य असे म्हणतात."

समांतर माध्याची वैशिष्ट्ये

(Characteristics of Artithmatic Average)

वरील व्याख्येवरुन समांतर माध्याची पुढील वैशिष्ट्ये स्पष्ट होतात -

१. समांतर माध्याची गणना करतांना पदमालेतील सर्वच पदांचा विचार केला जातो.

२. प्रत्येक पदाला त्याच्या आकारानुसार महत्व दिले जाते.

३. समांतर माध्य व हे सर्व पदांचे सारखेच प्रतिनिधीत्व करते.

४. समांतर माध्य हे पदमालेतील संख्येपैकी एक असलेच पाहिजे असे बंधन नाही.

समांतर माध्याचे गुण

(Merits of Arithmetic Average)

समांतर माध्यात पुढील गुण दिसून येतात -

१. समांतर माध्याची निश्चित व्याख्या करता येते.

२. समांतर माध्य काढण्यास व समजण्यास अत्यंत सोपे असते.

३. इतर सांख्यिकीय गणनेसाठी समांतर माध्य उपयुक्त ठरते.

४. समांतर माध्याची गणना करतांना पदमालेच्या रचनेत कोणताही बदल करावा लागत नाही.

५. समांतर माध्य हे प्रत्यक्षपणे काढले जात असल्यामुळे त्यात बीजगणीतीय सूत्रांचा वापर करता येतो.

६. समांतर माध्य हे प्रत्येक पदाच्या आकारानुसार विचार करते. त्यामुळे ते खऱ्या अर्थाने प्रातिनिधीक स्वरुपाचे असते.

७. मोठ्या पदमालेत अती टोकाच्या पदांचा प्रभाव कमी होत असल्यामुळे समांतर माध्य बऱ्याच प्रमाणात योग्य असते.

८. कल्पित माध्य घेवून लघुरीतीचा अवलंब केल्यास गणन बरेच कमी होवून वेळेची बचत होते.

९. पदमालेतील काही पदे माहित नसतील तरी सुध्दा समांतर माध्य काढता येते.

१०. समांतर माध्यामुळे उपलब्ध माहितीबाबत अधिक गहन माहिती मिळू शकते.

समांतर माध्याचे दोष

(Demerits of Arthmetic Average)

समांतर माध्यात पुढील दोष आढळून येतात -

१. जर पदसंख्या कमी असेल तर अतिटोकाच्या पदांचा माध्यावर विपरित परिणाम होतो. त्यामुळे येणारे माध्य प्रातिनिधिक नसते.

२. माध्याबरोबर संबंधित पदमाला दिली नसेल तर चुकीचे निष्कर्ष निघतात.

३. मोठ्या सांख्यिकीय क्षेत्रासाठी समांतर माध्य काढता येत नाही.

४. समांतर माध्य केवळ निरिक्षणाने काढता येत नाही. त्यासाठी गणितीय पध्दतींचा उपयोग करावाच लागतो.

५. गुणात्मक अभ्यासासाठी समांतर माध्य उपयुक्त नसते.

६. समांतर माध्य केवळ निरिक्षणाने काढता येत नाही. त्यासाठी गणितीय सुत्राचा वापर करावा लागतो.

७. समांतर माध्याला फारसे व्यावहारिक महत्व नाही.

८. पदमालेतील एखादे पद जरी माहिती नसेल तर मात्र समांतर माध्याद्वारे योग्य निष्कर्ष काढता येत नाही.

२. मध्यका

(Median)

मध्यका हे केंद्रिय प्रवृत्तीचे एक महत्वाचे परिमाण आहे. परंतु हे परिमाण समांतर माध्याप्रामणे किंमतीवर अवलंबून नसून पदमूल्याच्या स्थानावर अवलंबून आहे. जर सर्व पदमूल्ये चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने मांडले तर स्थानपरत्वे ते मूल्य मध्यभाग आहे. त्याला मध्यका किंवा मध्यांक असे म्हणतात.

व्याख्या

(Definition)

“जेव्हा एखाद्या पदमालेतील पदे चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने लिहून त्यातील बरोबर मधले पद शोधून काढले जाते तेव्हा त्या पदाला ‘मध्यका’ असे म्हणतात.”

मध्यकाची वैशिष्ट्ये

(Characteristics of Median)

वरील व्याख्येवरुन मध्यकाची पुढील वैशिष्ट्ये स्पष्ट होतात -

१. मध्यका पदमालेला दोन समान भागात विभागते.

२. मध्यका हे पदमालेतीलच एक पद असते.

३. मध्यका हे निरिक्षणाद्वारे काढता येते.

४. पदमालेतील मधोमध असणाऱ्या आकाराला किंवा मूल्याला मध्यका असे म्हणतात.

५. मध्यकेच्या वरील पदे मध्यकेपेक्षा लहान व खालील पदे मध्यकेपेक्षा मोठी असतात.

६. जेव्हा पदमूल्यांची संख्या विषम असते तेव्हा मध्यकाचे उत्तर निश्चित सांगता येते परंतु जेव्हा पदमूल्यांची संख्या सम असते तेव्हा मात्र मध्यकाचे उत्तर निश्चित नसते.

मध्यकाचे गुण

(Merits of Mediam)

मध्यकामध्ये पुढील प्रमुख गुण आहेत -

१. मध्यका हे निरिक्षणाद्वारे काढता येते. त्यामुळे मध्यका काढणे फारच सोपे असते.

२. मध्यका ही अचूक व निश्चित असते.

३. बीजगणीतीय सुत्रानुसार इतर गणन करण्यासाठी मध्यका उपयुक्त ठरते.

४. मध्यका हे पदमालेतीलच एक पद असल्यामुळे ते प्रातिनिधिक स्वरुपाचे असते.

५. वर्गांतरे असमान असली तरी मध्यका शोधून काढता येते.

६. मध्यका हे गुणात्मक अध्ययनासाठी अत्यंत उपयुक्त ठरते.

७. पदमालेतील सुरवातीच्या किंवा शेवटच्या किमती जास्त मोठ्या असतील तर त्यांचा समांतर माध्यावर परिणाम होतो तसा मध्यकावर होत नाही.

८. मध्यका आलेखावरुनही काढता येते.

मध्यकाचे दोष

(Demerits of Median)

मध्यकामध्ये गुण असले तरी पुढील दोषही आहेत -

१. मध्यका काढण्यासाठी पदमालेची पूर्नरचना करावी लागते.

२. साध्या गणितीय पध्दतीने मध्यका शोधून काढता येत नाही.

३. मध्यका समांतर माध्याच्या तुलनेत अधिक अनिश्चित असते.

४. मध्यका दोन मूल्यांच्या मध्ये असेल तर अशावेळी तिची निश्चित गणना करता येत नाही.

५. मध्यका काढतांना पदमालेतील विशिष्ट अंकांना महत्व दिले जाते. इतर अंक मात्र दुर्लक्षित राहतात.

६. पदमुल्यांची संख्या अत्यंत अल्प असल्यास मध्यका विशेष विश्वसनीय मानता येत नाही.

७. सतत पदमालेच्या बाबतीत मध्यका काढतांना काही बाबी गृहीत धराव्या लागतात. त्यात चूक झाल्यास मध्यकेचे योग्य गणन होत नाही.

भूयिष्टक / बहुलक

(Mode)

दिलेल्या पदमालेत ज्या मूल्याची सर्वात जास्त वेळा पुनरावृत्ती होते, त्या मूल्यास भुयिष्टक किवां बहुलक असे म्हणतात. वैयक्तिक पदमालेत वारंवार येणारे पद, खंडित पदमालेत महत्तम पदसंख्येशी संबंधित पदमूल्य तर सतत पदमालेत महत्तम पदसंख्येशी संबंधित गट भूयिष्टक स्पष्ट करतो.

व्याख्या

(Definition)

“कोणत्याही पदमालेत जे पद सर्वात जास्त वेळा येते किंवा पुन्हा पुन्हा येते त्या पदाच्या मूल्याला ‘भूयिष्टक’ असे म्हणतात.”

भूयिष्टकाची वैशिष्ट्ये

(Characteristics of Mode)

भुयिष्टकाची पुढील प्रमुख वैशिष्ट्ये आहेत -

१. भूयिष्टक हे पदमालेतीलच एक पद असते.

२. भूयिष्टक हे पदमालेतील पुन्हा-पुन्हा येणारे पद असते.

३. आलेखाद्वारे सुध्दा भूयिष्टक काढता येते. जेथे वारंवारीता सर्वाधिक असते तेथे वक्राची उंची महत्तम राहील. वक्राची उंची ज्या ठिकाणी सर्वोच्च असते तोच भूयिष्टक असतो.

भूयिष्टकाचे गुण

(Merits of Mode)

भूयिष्टक या माध्याचे पुढील गुण आहेत -

१. पदमालेची रचना न करता भूयिष्टक केवळ निरिक्षणाने काढता येते.

२. भूयिष्टक हे पदमालेतीलच पद असल्यामुळे ते पदमालेचे प्रतिनिधित्व करते.

३. जी माहिती गुणात्मक स्वरुपाची असते, तेथेही भूयिष्टकाचा उपयोग होतो. कारण भूमिष्टक हे प्रचलीत गुणविशेषांना महत्व देते.

४. भूयिष्टकाची गणना करतांना अति टोकाच्या पदांचा विचार केला जात नसल्यामुळे भूयिष्टकाच्या गणनेवर या पदांचा विपरीत परिणाम होत नाही.

५. पदमालेत काही पदे मिळवलीत किंवा काही पदे काढलीत तरी भूयिष्टकाच्या स्थितीवर त्यांचा परिणाम होत नाही.

६. वारंवारीतेचे विषम वितरण झालेले असल्यास भूयिष्टक हे एक उपयुक्त माध्य ठरते.

७. भूयिष्टकाचे गणन वक्र पध्दतीने सुध्दा करता येते.

भुयिष्टकाचे दोष

(Demerits of Mode)

भूयिष्टकात पुढील दोष आढळून येतात -

१. भूयिष्टक हे निश्चित नसल्यामुळे त्याची निश्चित अशी व्याख्या करता येत नाही.

२. भूयिष्टक हे गणितीय गणनाकरीता उपयुक्त नाही.

३. पदमालेत समान वारंवारता असतील तर भूयिष्टक काढता येत नाही. तसेच पदमालेत कधीकधी दोन भूयिष्टक निघतात.

४. पदमालेतील अंतीम किंवा प्रथम पदावर भर दयावयाचा असल्यास भूयिष्टक उपयोगी ठरत नाही.

५. भूयिष्टक काढण्याच्या वेगवेगळ्या पध्दतीने वेगवेगळ्या किमती येतात. म्हणजेच हे परिमाण काटेकोर नाही.

६. भूयिष्टक हे सर्वसमावेशक माध्य नाही. मालीकेतील फक्त काही मूल्यांवरच हे माध्य लक्ष केंद्रीत करते. बाकीचे मूल्ये उपेक्षित राहतात.

७. भूयिष्टकामध्ये पदमालेतील इतर पदांचा विचार केला जात नाही. त्यामुळे भूयिष्टकाद्वारे पदमालेचे योग्य प्रतिनिधीत्व होत नाही.

गुणोत्तर माध्य

(Geometric Mean)

पदांच्या संख्येत वाढ होत गेल्यास गणनन करणे क्लिष्ट आणि कठिण होते. अशावेळी पदमालेत छेदाच्या (Log) मदतीने गुणोत्तर माध्याची गणना केली जाते. तसेच जेव्हा पदमालेतील लहान आकाराच्या पदांचे महत्व वाढवावयाचे असते आणि मोठ्या आकाराच्या पदांचे महत्व कमी करावयाचे असते तेव्हा गुणोत्तर माध्याचा अवलंब करतात. पदमालेतील पदांची संख्या कमी असेल तर सर्व पदांच्या मूल्यांचा गुणाकार करुन त्याचे अनुक्रमे घनमूळ, चतुर्थमूळ, पंचमूळ काढून गुणोत्तर माध्याची गणना केली जाते.

व्याख्या

(Definition)

“जेव्हा एखाद्या पदमालेतील सर्व पदांच्या मूल्यांचा गुणाकार करुन त्याचे पदसंख्येइतके मूल्य काढण्यात येते. तेव्हा प्राप्त अंकाला ‘गुणोत्तर माध्य’ असे म्हणतात”

गुणोत्तर माध्याची वैशिष्ट्ये

(Characteristics of Geometric Mean)

गुणोत्तर माध्याची प्रमुख वैशिष्ट्ये पुढीलप्रमाणे सांगता येतील -

१. गुणोत्तर माध्य मोठ्या पदांना कमी व लहान पदांना जास्त महत्व देते.

२. गुणोत्तर माध्य हे समांतर माध्यापेक्षा नेहमीच लहान असते.

३. ऋणात्मक संख्यांचे गुणोत्तर माध्य निघत नाही.

गुणोत्तर माध्याचे गुण

(Merits of Geometric Mean)

गुणोत्तर माध्याचे गुण पुढील प्रमाणे आहेत -

१. गुणोत्तर माध्यामध्ये पदमालेतील सर्वच पदांचा विचार करण्यात येतो. त्यामुळे ह्या माध्यामुळे पदमालेची केंद्रीय प्रवृत्ती खऱ्या अर्थाने स्पष्ट होते.

२. गुणोत्तर माध्याची गणना करण्यासाठी पदमालेची वेगळी रचना करावी लागत नाही.

३. अनुमात, प्रतिशत प्रमाण, दर इत्यादींची गणना करण्यासाठी गुणोत्तर माध्याचा योग्य उपयोग करता येतो.

४. ज्या पदमालेत अधिक विषमता असेल त्या पदमालेकरीता हे माध्य अधिक परिणामकारक व उपयुक्त असते.

५. अंक गणितीय, बीजगणितीय गणनेसाठी तसेच निर्देशांक विश्लेषणासाठी देखील गुणोत्तर माध्य उपयोगी पडते.

६. गुणोत्तर माध्य मोठ्या पदांना कमी व लहान पदांना जास्त महत्व देत असल्यामुळे अति टोकाच्या पदांचा माध्यावरील होणारा विपरीत परिणाम टाळल्या जातो.

७. गुणोत्तर माध्य गृहीतास थारा देत नाही. हे माध्य संकल्पनेच्या व सूत्राच्या दृष्टीने सुस्पष्ट आहे.

गुणोत्तर माध्याचे दोष

(Demerits of Geometric Mean)

गुणोत्तर माध्यामध्ये खालील दोष आढळून येतात -

१. हे माध्य पूर्णपणे लॉगॅरीथम वर आधारीत असल्यामुळे सामान्यांकरीता ते बरेचसे क्लिष्ट व किचकट आहे.

२. पदमालेत एखादे पद जर शुन्यापेक्षा कमी असेल तर मात्र गुणोत्तर माध्य काढता येत नाही.

३. गुणोत्तर माध्य हे पदमालेतील एक पद असते. त्यामुळे ते पदमालेचे योग्यप्रकारे प्रतिनिधीत्व करु शकत नाही.

४. गुणोत्तर माध्य केवळ निरिक्षणाने निघू शकत नाही.

५. पदमालेतील मोठ्या संख्यांना जास्त व लहान संख्यांना कमी महत्व दयावयाचे असल्यास गुणोत्तर माध्य उपयुक्त ठरत नाही.

६. गुणोत्तर माध्याची गणना करतांना अनेक गणितीय पध्दती उपयोगात आणाव्या लागतात. त्यामुळे या माध्याची गणना करणे किचकट आणि कठिण होते.

हरात्मक माध्य

(Harmonic Mean)

ज्यावेळी पदमालेतील लहान पदांचे महत्व वाढवावयाचे असते व मोठ्या पदांचे वर्चस्व कमी करायचे असते तेव्हा हरात्मक माध्याचा (Harmonic Mean) उपयोग करतात. म्हणजेच हे माध्य सहेतुक वापरले जाते. हरात्मक माध्य हे पदमालेतील विविध पदांच्या व्यत्क्रमांच्या समांतर माध्याचे व्युत्क्रम असते. 'व्यत्क्रम' म्हणजे एककाला पदांच्या मूल्याने भाग देवून येणारी संख्या होय. पदमालेतील संख्या जर कमी असेल तर प्रत्यक्ष भाग देवून येणाऱ्या संख्येच्या बेरजेने पदसंख्येला भाग देता येतो. परंतु जर पदसंख्या जास्त असतील तर मा. 'व्यत्क्रम सारणीचा' (Reciprocal Table) उपयोग करावा लागतो.

व्याख्या

(Definition)

"पदमालेतील एकूण पदसंख्येला प्रत्येक पदमुल्याचे व्युत्क्रम काढून त्याच्या बेरजेने भाग दिल्यास जी संख्या येते त्या संख्येला 'हरात्मक माध्य' म्हणतात."

हरात्मक माध्याचे गुण

(Merits of Harmonic Mean)

हरात्मक माध्याचे गुण पुढीलप्रमाणे आहेत -

१. हरात्मक माध्यात पदमालेतील सर्वच पदांचा विचार केला जात असल्यामुळे केंद्रीय प्रवृत्तीचे मापन योग्य प्रकारे करता येते.

२. वारंवारीचे विषम वितरण झालेले असल्यास माध्य म्हणून हरात्मक माध्याचा वापर करणे अधिक संयुक्तिक असते.

३. हरात्मक माध्याचा उपयोग संख्याशास्त्र व गणितामध्ये पुढील अभ्यासासाठी केला जातो.

४. अतिटोकाच्या पदांचा होणारा विपरीत परिणाम हरात्मक माध्यामुळे टाळता येतो.

५. वेग, प्रवेग तसेच समय अध्ययनासाठी हरात्मक माध्य उपयोगाचे समजले जाते.

हरात्मक माध्याचे दोष

(Demerits of Harmonic Mean)

हरात्मक माध्याचे दोष पुढीलप्रमाणे सांगता येतील -

१. हरात्मकमाध्याची गणना क्लिष्ट असून ती समजण्यास कठीण आहे.

२. पदमालेतील एखादे जरी पद माहित नसेल तर मात्र हरात्मक माध्य काढता येत नाही.

३. हरात्मक माध्य पदमालेतील संख्यांच्या बाहेरचेही असू शकते, त्यामुळे ते पदमालेचे योग्य प्रतिनिधित्व करु शकत नाही.

४. पदमालेतील एखादा अंक ऋणात्मक असल्यास ह्या माध्याचे गणन करता येत नाही.

माध्यांची गणना

(Calculation of Averages)

प्रत्येक माध्याची गणना करण्यापूर्वी त्या माध्यांची 'सांख्यिकीय चिन्हे' समजून घेणे आवश्यक आहे. ही चिन्हे पुढीलप्रमाणे आहेत.

माध्य (Averages)	English Name	सांख्यिकीय चिन्हे
१. समांतर माध्य	Arthmetic Average or Mean	A
२. मध्यका	Median	M
३. भूयिष्टक	Mode	Z
४. गुणोत्तर माध्य	Geometric Mean	G.M.
५. हरात्मक माध्य	Harmonic Mean	H.M.

अ) वैयक्तिक पदमालेत समांतर माध्य, मध्यका व भूयिष्टक यांची गणना

वैयक्तिक पदमालेत समांतर माध्य, मध्यका आणि भूयिष्टक काढण्यासाठी पुढील सुत्रांचा उपयोग केला जातो.

१. समांतर माध्य

(Mean)

समांतर माध्य काढण्यासाठी दोन पध्दती आहेत -

i) प्रत्यक्ष पध्दती

(Direct Method)

ii) अप्रत्यक्ष पध्दती किंवा लघु पध्दती

(Indirect Methodo or Short-cut Method)

प्रत्यक्ष पध्दती	लघु पध्दती
१. दिलेल्या सर्व पदमूल्यांची (m) बेरीज करणे व Σm शोधून काढणे.	१. दिलेल्या पदमूल्यांपैकी एखादे पद किंवा संबंधित आकार क्षेत्रातील कोणतीही संख्या गृहीत माध्य (Assume mean - x) म्हणून निवडणे
२. एकूण पदसंख्या (n) प्राप्त करणे.	२. ह्या गृहीत माध्यापासून इतर पदमूल्यांची विचलने (Deviationgram assumed mean + dx शोधून काढणे व त्यांची बेरीज करुन Σdx शोधून काढणे
३. पुढील सूत्राचा उपयोग करणे $a = \frac{\sum m}{n}$ Where, a - Mean n - Total No. of items Σm – Total of size of item	३. पुढील सूत्राचा अवलंब करणे $a = x + \frac{\sum dx}{n}$ Where, a - Mean x – Assumed Mean n - Total No. of items Σdx – Total of deviation from assumed mean

उदा. 1. खालील माहितीवरुन समांतर माध्य (Mean) काढा

मजुरी :- 30, 70, 10, 70, 505, 8, 43, 250, 40, 35

S. No.	Wages (m)	Dx (x = 70)
1	30	-40
2	70	0
3	10	60
4	70	0
5	505	435
6	8	- 62
7	43	- 27
8	250	+ 180
9	40	- 30
10	35	- 35
n = 10	Σm = 1061	Σdx = +361

1. Direct Method:

$$a = \frac{\sum m}{n}$$

$$= \frac{1061}{10}$$

$$\therefore a = 106.1$$

2. Short-cut Method:

$$a = x + \frac{\sum dx}{n}$$

$$= 70 + \frac{361}{10}$$

$$= 70 + 36.1$$

$$\therefore a = 106.1$$

उदा. :- 2. खालील समंकावरुन समांतर माध्य (Arithmetic Average) काढा

M	dx (x = 20)
20	0
10	- 10
24	+ 4
45	+ 25
28	+ 8
20	0
22	+ 2
20	0
23	+ 3
Σm = 212	Σdx = 32

1. Direct Method:

$$a = \frac{\sum m}{n}$$
$$= \frac{212}{9}$$
$$\therefore a = 23.55$$

2. Short-cut Method:

$$a = x + \frac{\sum dx}{n}$$
$$= 20 + \frac{32}{9}$$
$$= 20 + 3.55$$
$$\therefore a = 23.55$$

२. मध्यका

(Median)

मध्यका काढतांना दिलेली पदमूल्ये (m) चढत्या क्रमाने (Assending Order) लिहून घेणे व पदसंख्या विचारात घेवून पुढील सूत्राचा उपयोग करणे.

$$m = Size\ of\ \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th} item$$

Where, m - Median

n - Total No. of items

उदा. :- 3. खालील पदमूल्यांवरुन मध्यका (Median) काढा

Year	Index Number
2001	206
2002	238
2003	253
2004	259
2005	269
2006	295
2007	312
2008	320
2009	331
	n = 9

M=The size of $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ $item$

= The size of $\left(\frac{9+1}{2}\right)^{th}$ $item$

= The size of $\left(\frac{10}{2}\right)^{th}$ $item$

= The size of 5^{th} $item$ is 269

∴ The median index no. is 269

उदा. :- 4. खालील माहितीवरुन मध्यका (Median) काढा

Production	Ascending Order
45	45
58	58
103	75
75	92
120	103
200	120
350	160
92	200
160	250
250	350
n = 10	

M = The size of $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ $item$

= The size of $\left(\frac{10+1}{2}\right)^{th}$ $item$

= The size of $\left(\frac{11}{2}\right)^{th}$ $item$

= The size of 5.5^{th} $item$ is 269

= The size of 5^{th} $item + 6^{th}$ $item$

$= \frac{103+120}{2}$

$= \frac{223}{2}$

$\therefore M = 111.5$

३. भूयिष्टक

(Mode)

वैयक्तिक पदमालेत भूयिष्टक काढण्यासाठी कोणत्याही सूत्राचा उपयोग केला जात नाही. मध्यकेची गणना करण्यासाठी जी पदरचना केली असते, त्यात जे पद सर्वात जास्त वेळा आले असेल, त्याला भूयिष्टक (z) असे म्हणतात.

Z = Most Repeated Item

जर एकापेक्षा जास्त पदमूल्ये तेवढ्याच संख्येने येत असतील तर मात्र भूयिष्टक अस्पष्ट (Not clear) आहे असे समजले जाते. अशावेळी भूयिष्टक काढण्यासाठी माध्य (Mean) आणि मध्यका (Median) यांचे द्वारे (3a-2a) या सूत्राचा उपयोग केला जातो.

उदा. :- 5. खालील समंकावरुन भूयिष्टक (Mode) काढा

Income
58
90
160
200
129
200
375
200
95

Z = Most Repeated item

= 200 Repeated 3 times

∴ Z = 200

उदा. :- 6. खालील आकडेवारीवरुन भूयिष्टक (Mode) काढा

Income (m)
50
55
110
110
200
220
220
385
500
950

Z = Most Repeated item

= 110 and 220 is repeated twice

∴ mode is not clear

∴ series is bymodal

उदा. :- 7. खालील पदमूल्यावरुन समांतर माध्य, मध्यका व भूयिष्टक काढा

(m)
30
35
40
100
100
120
120
185
300
950
$\Sigma m = 1980$

i) Mean:

$$a = \frac{\Sigma m}{n} \quad n = 10$$

$$= \frac{1980}{10}$$

$$\therefore a = 198$$

ii) Median

$$M = The\ size\ of\ \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}\ item$$

$$= The\ size\ of\ \left(\frac{10+1}{2}\right)^{th}\ item$$

$$= The\ size\ of\ \left(\frac{11}{2}\right)^{th}\ item$$

$$= The\ size\ of\ 5^{th}\ and\ 6^{th}\ item$$

$$= \frac{100+120}{2}$$

$$\therefore M = 110$$

iii) Mode:

Z = Most Repeated item

= 100 and 120 are repeated twice

∴ Z is not clear

∴ Series is bimodal

ब) खंडित पदमालेत समांतर माध्य, मध्यका आणि भूयिष्टक यांची गणना

(Calculation of Mean, Median and Mode in Discerete Series)

१) समांतर माध्य

(Mean)

खंडित पदमालेतही माध्य दोन पध्दतीने काढता येते -

प्रत्यक्ष पध्दती **(Direct Method)**	लघु पध्दती **(Short-cut Method)**
१. दिलेली पदमूल्ये (m) आणि पद संख्या (f) यांचा गुणाकार करुन (mf) आलेल्या संख्यांची बेरीज (Σmf) केली जाते.	१. दिलेल्या पदमूल्यांपैकी एखादे पद गृहीत माध्य (Assumed mean - x) मानून त्याच्या आधारे विचलन (dx) काढावे
२. पदसंख्या बेरीज करावी त्याला N संबोधावे.	२. विचलन (dx) आणि वारंवारता (f) यांचा गुणाकार करावा व fdx प्राप्त करावे. त्यांची बेरीज करुन Σfdx प्राप्त करावे
३. पूढील सूत्राचा उपयोग करावा $a = \frac{\Sigma mf}{n}$ Where, a = Mean n = Total No. of Frequencies Σmf = Total of size of item and frequency	३. वारंवारता (f) ची बेरीज करावी त्याला No. of item (n) संबोधावे
	४. पुढील सूत्राचा उपयोग करावा. $a = x + \frac{\Sigma fdx}{n}$ Where,

	a = Mean X = Assumed mean n = Totla No. of frequencies Σfdx= Total of frequency and deviation from assumed mean.

उदा. :- 8. खालील दिलेल्या वारंवारता वितरणावरुन समांतर माध्य (Mean) आगणित करा.

Marks (m)	No. of Students (f)	Mf
6	5	30
7	8	56
8	10	80
9	12	108
10	7	70
11	6	66
12	4	48
	n = 52	Σmf = 458

By Direct Method

$$a = \frac{\Sigma mf}{n}$$

$$= \frac{458}{52}$$

$$\therefore a = 8.81$$

उदा. :- 9. खालील दिलेल्या माहितीवरुन समांतर माध्य (Mean) काढा.

Size of item (m)	Frequency (f)	Dx (x = 9)	Fdx
8	4	- 1	- 4
7	5	- 2	- 10
6	8	- 3	- 24
9	12	0	0
12	7	+ 3	21
10	6	+ 1	6
11	4	+ 2	8
	n = 46		Σfdx = -3

By short-cut Method:

$$a = X + \frac{\Sigma f dx}{n} \qquad n = 46$$

$$x = 9$$

$$= 9 + \frac{-3}{46} \qquad \Sigma fdx = -3$$

$$= 9 + (-0.07)$$

$$\therefore a = 8.93$$

२. मध्यका

(Median)

१. दिलेल्या पदसंख्यांच्या सहाय्याने संचयी वारंवारता (Cumulative frequency -C.F.) शोधून काढणे. यासाठी पहिले पद तसेच ठेवावे व नंतरचे प्रत्येक पद त्यांच्यात मिळवत जावे शेवटची वारंवारता ही एकूण बेरजेबरोबर येईल.

२. वारंवारता (f) ची बेरीज करावी ती Total of Frequency (n) होईल.

३. पुढील सूत्राचा उपयोग करावा.

$$M = The\ size\ of\ \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}\ item$$

वरील सूत्राचा अवलंब करुन आलेली पदसंख्या ज्या संचयी वारंवारतेच्या (CF) अंतर्गत येत असेल तिचे पदमूल्य (Size of item) म्हणजे मध्यका (m) होय.

उदा. :- 10. खालील समंकावरुन मध्यका (Median) काढा.

Height of Budiling in ft (m)	No. of Buildings (f)	Cumulative Frequency (C.F.)
11	4	4
22	7	11
33	8	19
45	12	31
55	34	65
66	54	119
78	60	179
90	40	219
110	48	267
120	30	297
	n = 297	

$$M = The\ size\ of\ \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}\ item$$

$$= The\ size\ of\ \left(\frac{297+1}{2}\right)^{th}\ item$$

$$= The\ size\ of\ \left(\frac{298}{2}\right)^{th}\ item$$

$$= The\ size\ of\ 149^{th}\ item$$

This value (149) lies in the cumulative frequency 179

of which the item is 78.

$$\therefore M = 78$$

उदा. :- 11. खालील माहितीवरुन मध्यका (Median) काढा.

Daily wages (m)	No. of Employees (f)	Cumulative Frequency (C.F.)
2	7	7
3	13	20
4	17	37
5	20	57
6	21	78
7	19	97
8	16	113
9	11	124
10	6	130
11	4	134
12	2	136
	= 136	

$$M = The\ size\ of\ \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}\ item$$

$$= The\ size\ of\ \left(\frac{136+1}{2}\right)^{th}\ item$$

$$= The\ size\ of\ \left(\frac{137}{2}\right)^{th}\ item$$

∴ This size of 68.5^{th} item lies in the C.F. of 78

of which the item is 6

$\therefore M = 6$

३. भूयिष्टक

(Mode)

खंडित पदमालेत भूयिष्टक माहिती करुन घेण्यासाठी गटरचना (Grouping Table) तयार करावे लागतील.

Grouping Table

Size (m)	f (1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	Tally Marks
	दिलेल्या वारंवारतेमध्ये (f) सर्वात मोठे पद	पहिल्या वारंवारतेपासून दोन-दोन वारंवारतेची बेरीज करुन त्यातील	पहिली वारंवारता सोडून नंतरच्या दोन दोन वारंवारतेची बेरीज करुन	पहिल्या वारंवारतेपासून तीन-तीन वारंवारतेची बेरीज करुन आलेले सर्वात	पहिली वारंवारता सोडून नंतरच्या तीन तीन वारंवारतेची	पहिल्या दोन वारंवारता सोडून नंतरच्या तीन तीन	

		सर्वात मोठे पद	आलेले सर्वात मोठे पद	मोठे पद	बेरीज करुन आलेले सर्वात मोठे पद	वारंवारतेची बेरीज करुन आलेले सर्वात मोठे पद	

उदा. :-12. खालील पदमालेत बहुलक (Mode) काढा.

Item (m)	Frequency (f)
7	5
8	8
9	12
10	22
11	7
12	6
13	3
14	2

Grouping Table

Size of item (m)	Frequency						Tally Marks
	1	2	3	4	5	6	
7	5	13					
8	8		20	25			
9	12	34			42		|
10	22		29			41	|||
11	7	13		35			|||||
12	6		9		16		|||
13	3	5				11	|
14	2						

From the above graping table we find that 10 occurs the maximum number of times hence model size 10.

Or

Z = Most Repeated item

= 10 (6 times)

$\therefore Z = 10$

उदा. :- 13. खालील समंकावरुन भूयिष्टक (Mode) काढा.

Height in Inches (m)	No. of Students (f)
57	4
58	6
62	3
60	8
61	17
63	22
65	22
68	3
64	3
69	2

Grouping Table

<table>
<tr><th rowspan="2">Height in Inches (m)</th><th colspan="6">No. of Students (f)</th><th rowspan="2">Tally Marks</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></tr>
<tr><td>57</td><td>4</td><td rowspan="2">10</td><td></td><td rowspan="3">13</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>58</td><td>6</td><td rowspan="2">9</td><td rowspan="3">17</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>62</td><td>3</td><td rowspan="2">11</td><td rowspan="3">28</td><td></td></tr>
<tr><td>60</td><td>8</td><td rowspan="2">25</td><td rowspan="3">47</td><td>|</td></tr>
<tr><td>61</td><td>17</td><td rowspan="2">39</td><td rowspan="3">61</td><td>|||</td></tr>
<tr><td>63</td><td>22</td><td rowspan="2">44</td><td rowspan="3">47</td><td>||||||</td></tr>
<tr><td>65</td><td>22</td><td rowspan="2">25</td><td rowspan="3">28</td><td>||||</td></tr>
<tr><td>68</td><td>3</td><td rowspan="2">6</td><td></td><td>|</td></tr>
<tr><td>64</td><td>3</td><td rowspan="2">5</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>69</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

From the above table 63 size of item occuers at the maximum number of times. Hence model hight of the student in 63 inches.

उदा. :- 14. खालील माहितीवरुन समांतर माध्य (Mean), मध्यका (Median) व भूयिष्टक (Mode) काढा.

X	:	5	10	15	20	25	30	35	40
F	:	6	5	15	10	15	10	3	2

X	F	dx	fdx	C.F.
5	6	-15	-90	6
10	5	-10	-50	11
15	15	-5	-75	26
20	10	0	0	36
25	15	5	75	51
30	10	10	100	61
35	3	15	45	64
40	2	20	40	66
	Σn = 66		Σfdx = 45	

1. समांतर माध्य (Mean):

$$a = X + \frac{\Sigma f dx}{n}$$

$$= 20 + \frac{45}{66}$$

$$= 20 + (0.68)$$

$$\therefore a = 20.68$$

2. मध्यका (Median) :

$$M = The\ size\ of\ \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}\ item$$

$$= The\ size\ of\ \left(\frac{66+1}{2}\right)^{th}\ item$$

$$= The\ size\ of\ \left(\frac{67}{2}\right)^{th}\ item$$

∴ This size of 33.5^{th} item lies in the C.F. of 36 and its value is 20

$$\therefore M = 20$$

3. भूयिष्टक (Mode):

Grouping Table

X	Frequency						Tally Marks
	1	2	3	4	5	6	
5	6	11		26			
10	5		20		30		|
15	15	25				40	||||
20	10		25	35			|||||
25	15	25			28		|||||
30	10		13			15	||
35	3	5					
40	2						

Highest marks scored by two frequencies therefore mode will be calculated by the help of following formula.

Z = 3M – 2a

= 3x20 – 2 x 20.68

= 60-41.36

$\therefore Z = 18.64$

क) अखंडित / सतत पदमालेत समांतर माध्य, मध्यका व भूयिष्टकाची गणना

१. समांतर माध्य

सतत पदमालेत प्रत्यक्ष पध्दतीने समांतर माध्य शोधून काढण्यासाठी खालील दोन पध्दतीचा वापर केला जातो.

प्रत्यक्ष पध्दती

१. दिलेल्या पदमालेचे (Series) गट चढत्या क्रमाने लिहून घ्यावे.

२. खालील सुत्राच्या सहाय्याने प्रत्येक गटाचे (Group) मध्यमूल्य काढले जाते.

$$M.V. = \frac{Lower\ Value\ (L1) + \ Upper\ Value\ (L2)}{2}$$

३. प्रत्येक गटाच्या (Group) समोर त्याची वारंवारता (Frequency) लिहून घ्यावी.

४. मध्य मूल्य (M.V.) आणि संबंधित पदसंख्या (f) यांचा गुणाकार करुन आलेल्या संख्यांची बेरीज (Σmf) केली जाते.

५. पुढील सूत्राचा उपयोग केला जातो.

$$a = \frac{\Sigma mf}{n}$$

टिप – सामान्यत: सतत पदमालेत समांतर

लघु पध्दती

१. दिलेले गट (Group) चढत्या क्रमाने लिहून घ्यावे लागते.

२. प्रत्येक गटचे (Group) मध्यमूल्य (M.V.) $\frac{L1+L2}{2}$ घ्या सूत्राच्या सहाय्याने काढा.

३. M.V. मधून एखादे पद किंवा गणनाच्या सोयीकरीता योग्य ती संख्या गृहीत माध्य (Assumed mean, X) म्हणून निवडले जाते.

४. गृहीत माध्याचे (X) सर्व M.V. पासूनचे अंतर (deviation) (d) शोधून काढले जाते. त्याला dx हे नाव दयावे.

५. विचलन (dx) आणि वारंवारता (f) याचा गुणाकार (fdx) करुन त्याची बेरीज करावी (Σfdx)

माध्य शोधून काढण्याकरीता प्रत्यक्ष पध्दतीचा वापर केला जात नाही.

६. वारंवारतेची बेरीज करावी म्हणजे ‘n’ मिळेल

७. पुढील सूत्राचा उपयोग करावा

$$a = x + \frac{\Sigma f dx}{n}$$

a – Mean
x – Assumed Mean
n – Total Frequencies
Σfdx – Total of frequency and deviation from assumed mean.

पदविचलन पध्दती (Step Deviation Method)

सतत पदमालेत समांतर माध्य काढण्याकरीता तिसरी पध्दती देखील आहे. याला पदविचलन पध्दती असे म्हणतात.

१. प्रत्येक गटाकरीता मध्यमूल्य (M.V.) काढावे.

२. मध्य मूल्यापैकी (M.V.) एखादे पद गृहीत माध्य (x) धरावे व विचलन (dx) काढावे.

३. त्यानंतर विचलन अंतर (Step Deviation) शोधून काढणे. हे पदमालेतील अंतर होय. याला (i) ने संबोधावे.

४. सर्व विचलनाला (dx) ला (i) ने भाग देवून पदविचलन (dxi) शोधून काढणे.

५. पदविचलन (dxi) आणि वारंवारता (f) याचा गुणाकार (fdxi) करुन आलेल्या संख्यांची बेरीज (Σdxi) करावी.

६. वारंवारतेची बेरीज केली तर ‘n’ मिळेल.

७. पुढील सुत्राचा उपयोग करावा.

$$a = x + \frac{\Sigma f dx}{n} \times i$$

a = Mean

x = Assumed Mean

Σfdx = Total of frequency and step deviation from assumed mean

n = Total of Frequencies

i = step deviation

उदा. :-15. प्रत्येक विद्यार्थ्याच्या सरासरी गुणांचे (Mean) आगणन करा.

Marks	:	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
No. of students	:	7	13	20	25	10	8	6	1

Marks	No. of Students		(x=45)	(i=10)	
(m)	(M.V.)	(f)	Dx	dx	Fdx
10-20	15	7	-30	-3	-21
20-30	25	13	-20	-2	-26
30-40	35	20	-10	-1	-20
40-50	45	25	0	0	0
50-60	55	10	+10	+1	+10
60-70	65	8	+20	+2	+16
70-80	75	6	+30	+3	+18
80-90	85	1	+40	+4	+4
		n = 90			Σfdx = -19

$$Mean: a = x + \frac{\Sigma f dx}{n} \times i$$

$$= 45 + \frac{-19}{90} \times 10$$

$$= 45 + \left(-\frac{190}{90}\right)$$

$$= 45 + (-2.1)$$

$$= 45 - 2.1$$

$$\therefore a = 42.9$$

उदा. :-16. खालील माहितीवरुन समांतर माध्य काढा.

Income Limit	:	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600
No. of Person (f)	:	15	18	30	20	17

Income Limit (m)	No. of Persons (f)	M.V.	(x =350) dx	(100) I	Fdx
100-200	15	150	-200	-2	-30
200-300	18	250	-100	-1	-18
300-400	30	350	0	0	0
400-500	20	450	+100	+1	+20
500-600	17	550	+200	+2	+34
	n = 100				Σ fdx = 6

$$a = x + \frac{\Sigma f dx}{n} \times i$$

$$= 350 + \frac{6}{100} \times 100$$

$$= 350 + \frac{600}{100}$$

$$= 350 + 6$$

$$\therefore a = 356$$

२. **मध्यका** (Median):

१. दिलेल्या पदसंख्यांच्या सहाय्याने संचयी वारंवारता (C.F.) शोधून काढणे.

२. वारंवारतेची बेरीज करावी (Total of frequencies) ती 'n' होईल.

३. पूढील सुत्राचा अवलंब करावा.

$$M = The\ size\ of\ \left(\frac{n}{2}\right)^{th}\ item$$

४. वरील सूत्रानुसार येणारी संख्या म्हणजे मध्यका पद (m) असून ही संख्या ज्या संचयी वारंवारतेच्या अंतर्गत असेल तिचा गट म्हणजे मध्यका गटा (Median Group) होय.

५. मध्यका गटावरुन मध्यका शोधून काढण्यासाठी पुढील सूत्राचा अवलंब करावा.

$$M = L_1 + \frac{L_2 - L_1}{f_1}(m - c)$$

M – मध्यका (Median)

L_1 – मध्यका गटाची न्यूनतम सीमा (Lower limit of median group)

L_2 – मध्यका गटाची उच्चतम सीमा (Upper limit of Median group)

f_1 – मध्यका गटाची वारंवारता (Frequency of Median group)

m – n/2

C – मध्यका गटाच्या आधीच्या गटाची संचयी वारंवारता (Cumulative frequency of the previous group of the median group)

उदा. :- 17. खालील वारंवारता वितरणावरुन मध्यका (Median) काढा.

Size	:	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
F	:	3	18	30	45	32	30	23	14

Size (m)	Frequency (f)	C.F.
0-10	3	3
10-20	18	21
20-30	30	51
30-40	45	96
40-50	32	128
50-60	30	158
60-70	23	181
70-80	14	195
	n = 195	

$$m = The\ size\ of\ \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}\ item$$

$$= The\ size\ of\ \left(\frac{195+1}{2}\right)^{th}\ item$$

$$= The\ size\ of\ \left(\frac{196}{2}\right)^{th}\ item$$

$$= The\ size\ of\ 98^{th}\ item$$

This value (98) lies in the C.F. 128. Therefore group is 40-50

$$\therefore Median\ group\ is\ 40-50$$

$$M = L_1 + \frac{L_2 - L_1}{f_1}(m-c)$$

$$= 40 + \frac{50-40}{32}(98-96)$$

$$= 40 + \frac{10}{32}(2)$$

$$= 40 + \frac{20}{32}$$

$$= 40 + .63$$

$$\therefore M = 40.63$$

उदा :- 18. खालील माहितीवरुन मध्यका (Median) काढा.

Size	10-20	20-30	30-40	40-50
Frequency	42	25	58	40

Size (m)	Frequency (f)	C.F.
10-20	42	42
20-30	25	67
30-40	58	125
40-50	40	165
	n = 165	

$$m = The\ size\ of\ \left(\frac{n}{2}\right)^{th}\ item$$

$$= The\ size\ of\ \left(\frac{165}{2}\right)^{th}\ item$$

$$= The\ size\ of\ 82.5^{th}\ item$$

lies in the C.F. 125 therefore median group is 30-40 and frequency of that group is 58.

$$m = L_1 + \frac{L_2 - L_1}{f_1}(m - c)$$

$$= 30 + \frac{40 - 30}{58}(82.5 - 67)$$

$$= 30 + \frac{10}{58}(15.5)$$

$$= 30 + \frac{155}{58}$$

$$= 30 + 2.67$$

$\therefore$ m = 32.67

३. भूयिष्टक / बहुलक (Mode):

सतत पदमालेत भूयिष्टक काढण्यासाठी खालील पध्दतीचा अवलंब करावा.

१. गट तक्त्या सहाय्याने Model group शोधून काढावा.

२. प्रत्यक्षात भूयिष्टक काढण्यासाठी खालील सूत्राचा अवलंब करावा.

$$Z = L_1 + \frac{f_2 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}(L_2 - L_1)$$

Z - भूयिष्टक (Mode)

L_1 - भूयिष्टक गटाची न्यूनतम सीमा (Lower limit of the model group)

L_2 - भूयिष्टक गटाची उच्चतम सीमा (Upper limit of the model group)

f_0 - भूयिष्टक गटाच्या आधिच्या गटाची वारंवारता (Frequency of the previous group of the model group)

f_1 - भूयिष्टक गटाची वारंवारता (frequency of the model group)

f_2 - भूयिष्टक गटाच्या पुढच्या गटाची वारंवारता (frequency of the next group of the model group)

जर दिलेल्या पदमालेतून भूयिष्टक स्पष्ट निघत नसेल तर भूयिष्टक काढण्यासाठी खालील सूत्राचा अवलंब करावा.

Z = 3 M - 2a

Z - भूयिष्टक (Mode)

M - मध्यका (Median)

a - माध्य (Mean)

उदा. :- 19. खालील माहितीच्या आधारे भूयिष्टक (Mode) काढा.

Class	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
Frequency:	15	11	13	21	21	15	11	3	5

Grouping Table

<table>
<tr><th rowspan="2">Class (m)</th><th colspan="6">Frequencies</th><th rowspan="2">Tally Marks</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></tr>
<tr><td>0-5</td><td>15</td><td>26</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5-10</td><td>11</td><td></td><td>24</td><td>39</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10-15</td><td>13</td><td>34</td><td></td><td></td><td>45</td><td></td><td>|</td></tr>
<tr><td>15-20</td><td>21</td><td></td><td>42</td><td>57</td><td></td><td>55</td><td>||||</td></tr>
<tr><td>20-25</td><td>21</td><td>36</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>||||||</td></tr>
<tr><td>25-30</td><td>15</td><td></td><td>26</td><td></td><td>47</td><td>29</td><td>|||</td></tr>
<tr><td>30-35</td><td>11</td><td>14</td><td></td><td>19</td><td></td><td></td><td>|</td></tr>
<tr><td>35-40</td><td>3</td><td></td><td>8</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>40-45</td><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Z = Most Repeated item

= 20-25

∴ Model group is 20-25

$$Z = L_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}(L_2 - L_1)$$

$$= 20 + \frac{21 - 21}{2 \times 21 - 21 - 15}(25 - 20)$$

$$= 20 + \frac{0}{6}(5)$$

= 20+0

∴ Z = 20

उदा. :- 20. खालील समंकावरुन भूयिष्टक (Mode) काढा.

Class :	20-60	60-100	100-140	140-180	180-220	220-260	260-300	300-340
Frequency:	1	9	21	47	52	36	19	3

Class (m)	Frequency (f)						Tally Marks
	1	2	3	4	5	6	
20-60	1	10		31			
60-100	9		30		77		
100-140	21	68				120	|
140-180	47		99	135			|||
180-220	52	88			107		||||||
220-260	36		55			58	|||
260-300	19	22					|
300-340	3						

From the above table model group is 180-220 frequency of that group is 52 .

$$Z = L_1 + \frac{f_2 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}(L_2 - L_1)$$

$$Z = 180 + \frac{52 - 47}{2 \times 52 - 47 - 36}(220 - 180)$$

$$= 180 + \frac{5}{104 - 47 - 36}(40)$$

$$= 180 + \frac{200}{21}$$

$= 180+9.5^2$

$\therefore Z = 189.52$

उदा. :- 21. खालील वितरणाकरीता समांतर माध्य (Arithmetic Mean), मध्यका (Median) व भूयिष्टक (Mode) काढा.

Class :	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110
Frequency:	1	3	6	11	9	11	7	6	3	1

Class (m)	M.V.	Frequency (f)	d÷55 dx	(10) i	Fdx	C.F.
10-20	15	1	-40	-4	-4	1
20-30	25	3	-30	-3	-9	4
30-40	35	6	-20	-2	-12	10
40-50	45	11	-10	-1	-11	21

50-60	55	9	0	0	0	30
60-70	65	11	+10	+1	11	41
70-80	75	7	+20	+2	14	48
80-90	85	6	+30	+3	18	54
90-100	95	3	+40	+4	12	57
100-110	105	1	+50	+5	5	58
		n =58			Σfdx = 24	

१. समांतर माध्य (Mean):

$$a = x + \frac{\Sigma fdx}{n} \times i$$

$$= 55 + \frac{24}{58} \times 10$$

$$= 55 + \frac{240}{58}$$

$$= 55 + 4.14$$

$$\therefore a = 59.14$$

२. मध्यका (Median):

$$M = The\ size\ of\ \left(\frac{n}{2}\right)^{th}\ item$$

$$= The\ size\ of\ \left(\frac{58}{2}\right)^{th}\ item$$

$= The\ size\ of\ 29^{th}\ item$ lies in the C.F. 30

Therefore median group is 50-60 and frequency of that group is 9.

$$M = L_1 + \frac{L_2 - L_1}{f_1}(m - c)$$

$$= 50 + \frac{60 - 50}{9}(29 - 21)$$

$$= 50 + \frac{10}{9}(8)$$

$$= 50 + \frac{80}{9}$$

$$= 50 + 8.89$$

$$\therefore M = 58.89$$

३. भूयिष्टक (Mode)

Class	Frequencies						Tally Marks
	1	2	3	4	5	6	
10-20	1	4					
20-30	3		9	10			
30-40	6	17			20		|
40-50	11		20			26	||||
50-60	9	20		31			|||||
60-70	11		18		27		||||
70-80	7	13				24	|
80-90	6		9	16			
90-100	3	4			10		
100-110	1						

The model group is 50-60 f = 9

$$Z = L_1 + \frac{f_2 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}(L_2 - L_1)$$

$$= 50 + \frac{9 - 11}{2 \times 9 - 11 - 11}(60 - 50)$$

$$= 50 + \frac{-2}{18 - 11 - 11}(10)$$

$$= 50 + \frac{-20}{-4}$$

$= 50+5$

$\therefore Z = 55$

अपेक्षित प्रश्न

दिर्घोत्तरी प्रश्न

१. सांख्यिकीय माध्याचे प्रकार सांगून त्यांचे गुण व दोष स्पष्ट करा.

२. समांतर माध्य मध्यका व भूयिष्टकाचे गुण-दोष सांगा

३. गुणोत्तर माध्य व हरात्मक माध्याचे गुण-दोष स्पष्ट करा.

लघुत्तरी प्रश्न

१. सांख्यिकीचे अर्थशास्त्रातील महत्व स्पष्ट करा.

२. सांख्यिकीचे कार्यक्षेत्र स्पष्ट करा.

३. सांख्यिकीय माध्याचे प्रकार सांगा

४. मध्यकाचे गुण व दोष स्पष्ट करा.

५. टिप लिहा.

अ) गुणोत्तर माध्य

ब) हरात्मक माध्य

६. खालील माहितीवरुन समांतर माध्य काढा.

30, 70, 80, 25, 40, 35, 20, 38, 42, 60

Ans = 44

७. खालील आकडेवारीवरुन माध्याची गणना करा.

S.No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Height in cm	55	57	58	59	60	58	57	61	62	63

Ans = 59

८. खालील समंकावरुन समांतर माध्याचे आगणन करा.

m	:	2	4	6	8	10	12	14	16
f	:	5	7	10	13	17	9	6	3

Ans = 8.74

९. खालील माहितीवरुन समांतर माध्याचे आगणन करा.

Marks :	20	25	30	40	45	50	52	56	60	62
No. of Students:	2	7	10	17	19	23	9	7	5	1

Ans = 44.22

१०. खालील समंकावरुन समांतर माध्य काढा.

Wages :	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18
No. of : Workers	11	14	20	32	25	7	5	2

Ans = 8.67

११.खालील आकडेवारीवरुन समांतर माध्याची गणना करा.

Marks :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
No. of Students :	8	15	23	30	10	4

Ans = 28.44

१२. खालील समंकावरुन मध्यका काढा.

S.No. :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Marks Obtained :	10	12	14	17	18	20	21	30	32	34

Ans = 19

१३. खालील माहितीवरुन मध्यका काढा.

Family :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Income:	600	525	400	800	620	640	750	350	375	825	920	230

Ans = 610

१४. खालील समंकावरुन मध्यका काढा.

Marks :	18	22	30	37	40	45	50	56	60
No. of Students :	2	8	10	15	18	12	8	6	7

१५. खालील आकडेवारीवरुन मध्यका काढा.

Daily wages :	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
No. of Employees:	7	13	17	20	21	19	16	11	6	4	2

Ans = 16

१६. खालील माहितीवरुन मध्यका काढा.

Daily Expenditure:	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
No. of families :	3	7	9	13	6	2

Ans = 61.53

१७. खालील समंकावरुन मध्यका काढा.

Marks :	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
No. of students:	15	21	35	52	49	17	3	1

Ans = 44.9

१८. खालील आकडेवारी वरुन भूयिष्टक काढा.

57, 50, 60, 65, 80, 40, 43, 63, 70, 60, 53, 57, 63, 53, 57, 60, 57.

Ans = 57

१९. खालील माहितीवरुन भूयिष्टक काढा.

Height in cm :	160	162	163	164	165	166	167	168	169	170
No. of persons (f) :	5	13	18	20	21	30	23	12	4	2

Ans = 166

२०.खालील समंकावरुन भूयिष्टक काढा.

Size of Farms (in Hec) :	50	55	60	65	70	72	75	80	82	90
No. of Farms :	7	17	23	28	32	26	21	15	8	5

Ans = 70

२१.खालील आकडेवरुन भूयिष्टक काढा.

Marks :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
No. of Students:	15	17	29	28	26	20	15	10

Ans = 20

२२. खालील वितरणावरुन समांतर माध्य व मध्यका काढा.

S. No.:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Marks:	15	35	43	46	48	48	49	50	55	56	60	64	71	75	80	85

a = 55 M = 52.5

२३. खालील माहितीवरुन माध्य, मध्यका व भूयिष्टक काढा.

Age :	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
No. of Women :	37	162	343	390	256	433	160	355	65	85	49	46	40

a = 17.72, M = 18, z = 16

२४. खालील आकडेवारीवरुन माध्य, मध्यका व भूयिष्टक काढा.

Weekly wages :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
No. of Workers:	11	15	23	30	32	21	18	6

a = 39.23, M = 39.67, z = 41.53